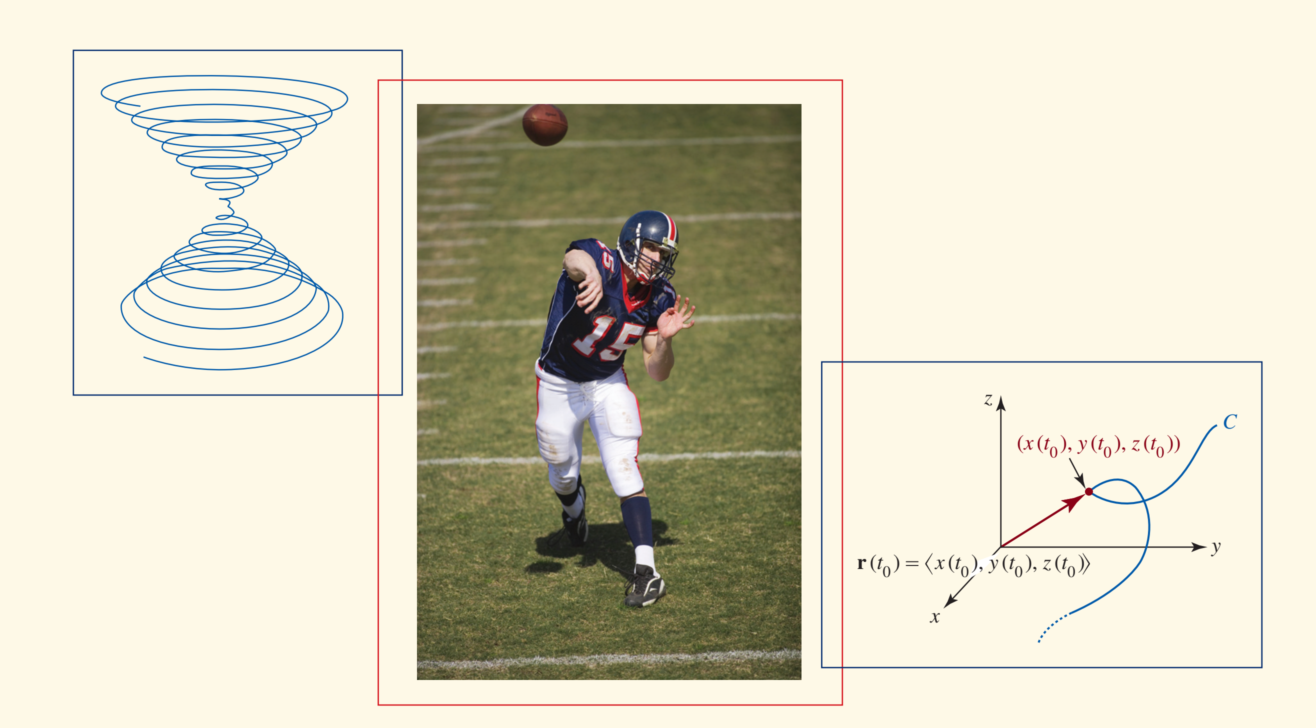
Capítulo 12

Funciones de valores vectoriales



En este capítulo Una curva en el plano así como una curva *C* en el espacio tridimensional pueden definirse mediante ecuaciones paramétricas. Al emplear las funciones como componentes en un conjunto de ecuaciones paramétricas, podemos construir una función de valores vectoriales cuyos valores son los vectores de posición de los puntos sobre la curva *C*. En este capítulo consideraremos el cálculo y las aplicaciones de estas funciones vectoriales.

12.1 Funciones vectoriales

Introducción Vimos en la sección 10.2 que una curva C en el plano xy puede parametrizarse mediante dos ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{1}$$

En ciencias e ingeniería muchas veces es conveniente introducir un vector **r** con las funciones f y g como componentes:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. En esta sección se estudian los análogos de (1) y (2) en tres dimensiones.

Funciones de valores vectoriales Una curva C en el espacio tridimensional, o una **curva espacial**, se parametriza mediante tres ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{3}$$

Como en la sección 10.2, la **orientación** de C corresponde a *valores crecientes* del parámetro t. Al emplear las funciones en (3) como componentes, la contraparte en el espacio tridimensional de (2) es

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \tag{4}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$. Afirmamos que **r** en (2) y (4) es una **función de valores vectoriales**, o simplemente una **función vectorial**. Como se ilustra en la FIGURA 12.1.1, para un número dado t_0, el vector $\mathbf{r}(t_0)$ es el *vector de posición* de un punto P sobre la curva C. En otras palabras, cuando varía t, podemos prever la curva C como si fuera trazada por la punta de flecha móvil de $\mathbf{r}(t)$.

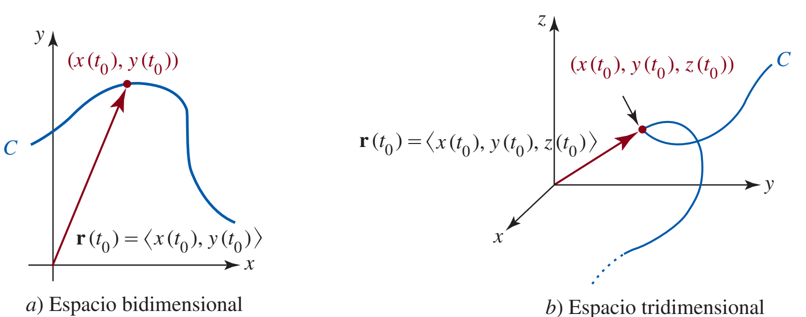


FIGURA 12.1.1 Funciones vectoriales en los espacios bidimensional y tridimensional

Rectas Ya se dio un ejemplo de ecuaciones paramétricas así como la función vectorial de una curva espacial en la sección 11.5 donde analizamos la recta en el espacio tridimensional. Recuerde, las ecuaciones paramétricas de una recta L que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el espacio y es paralela a un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, son

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad -\infty < t < \infty.$$

Estas ecuaciones resultan del hecho de que los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ y **v** son paralelos de modo que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es un múltiplo escalar de **v**, esto es, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. En consecuencia, una función vectorial de la recta L está dada por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. La última ecuación se expresa en las formas alternas

$$\mathbf{r}(t) = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle$$

y

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j} + (z_0 + ct)\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ son los vectores de posición de dos puntos distintos P_0 y P_1, entonces podemos considerar $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$. Una función vectorial de la recta que pasa por los dos puntos es $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1. \tag{5}$$

Si el intervalo del parámetro es cerrado $[a, b]$, entonces la función vectorial (5) traza el **segmento de recta** entre los puntos definidos por $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(b)$. En particular, si $0 \leq t \leq 1$ y $\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$, entonces la orientación es tal que $\mathbf{r}(t)$ traza el segmento de recta del punto P_0 al punto P_1.

EJEMPLO 1 Gráfica de una función vectorial

Encuentre una función vectorial del segmento de recta del punto $P_0(3, 2, -1)$ al punto P_1 $(1, 4, 5)$.

Solución Los vectores de posición correspondientes a los puntos dados son $\mathbf{r}_0 = \langle 3, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 1, 4, 5\rangle$. Entonces, de (5) una función vectorial para el segmento de recta es

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 2, -1\rangle + t\langle 1, 4, 5\rangle$$

o

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3 - 2t, 2 + 2t, -1 + 6t\rangle,$$

donde $0 \leq t \leq 1$. La gráfica de la ecuación vectorial está dada en la FIGURA 12.1.2. ■

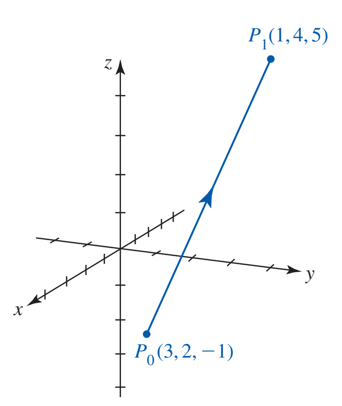


FIGURA 12.1.2 Segmento de recta del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Gráfica de una función vectorial

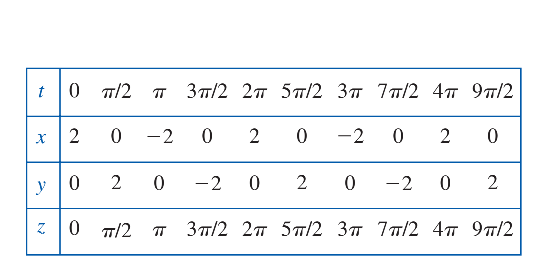
Grafique la curva C trazada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva C son $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = t$. Al eliminar el parámetro t de las primeras dos ecuaciones,

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\,\text{sen}\,t)^2 = 2^2,$$

observamos que un punto sobre la curva yace en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$. Como advertimos en la FIGURA 12.1.3 y la tabla adjunta a la misma, cuando aumenta el valor de t, la curva se enrolla hacia arriba en una espiral cilíndrica o una hélice circular.



t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$
x	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0
y	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2
z	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$

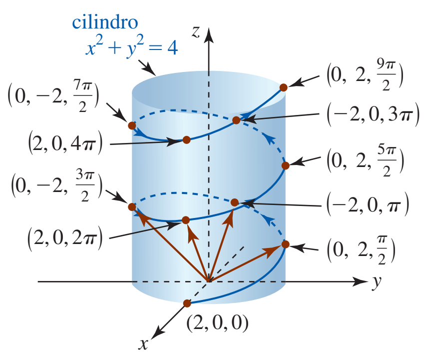


FIGURA 12.1.3 Gráfica de la función vectorial del ejemplo 2 ■

Curvas helicoidales

La curva en el ejemplo 2 es una de varios tipos de curvas espaciales conocidas como **curvas helicoidales**. En general, una función vectorial de la forma

$$\mathbf{r}(t) = a\cos kt\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k} \tag{6}$$

describe una **hélice circular**. El número $2\pi c/k$ recibe el nombre de **horquilla** de una hélice. Una hélice circular es sólo un caso especial de la función vectorial

La hélice definida por (6) se enrolla hacia arriba a lo largo del eje z. La horquilla es la separación vertical de los lazos de la hélice.

$$\mathbf{r}(t) = a\cos kt\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, \tag{7}$$

que describe una **hélice elíptica** cuando $a \neq b$. La curva definida por

$$\mathbf{r}(t) = at\cos kt\,\mathbf{i} + bt\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k} \tag{8}$$

se denomina **hélice cónica**. Por último, una curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = a\,\text{sen}\,kt\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + a\cos kt\,\mathbf{k} \tag{9}$$

se llama **hélice esférica**. En (6)-(9) se supone que a, b, c y k son constantes positivas.

EJEMPLO 3 Curvas helicoidales

a) Si se intercambian, por ejemplo, las componentes y y z de la función vectorial (7), obtenemos una hélice elíptica que se enrolla lateralmente a lo largo del eje y. Por ejemplo, con la ayuda de un SAC, la gráfica de la hélice elíptica

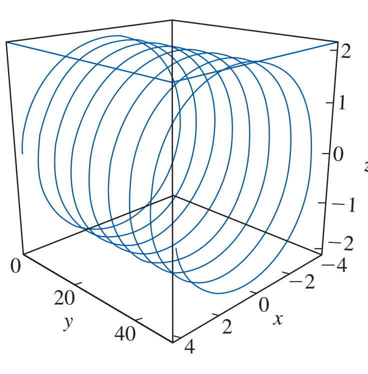
$$\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{k}$$

se muestra en la FIGURA 12.1.4*a*).

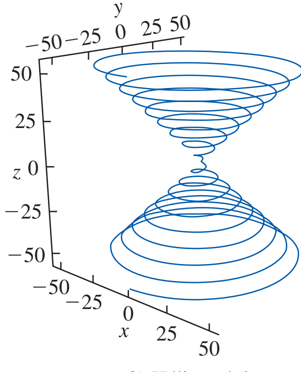
b) La figura 12.1.4*b*) muestra la gráfica de

$$\mathbf{r}(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

e ilustra por qué una función vectorial de la forma dada en (8) define a una hélice cónica. Para mayor claridad, se ha decidido suprimir la caja que por omisión rodea a la salida 3D de *Mathematica*.



a) Hélice elíptica



b) Hélice cónica

FIGURA 12.1.4 Curvas helicoidales del ejemplo 3 ■

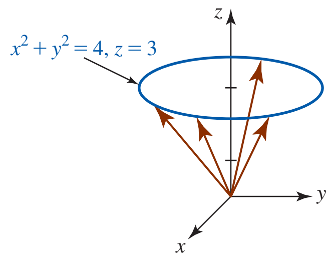


FIGURA 12.1.5 Círculo en un plano en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Gráfica de una función vectorial

Grafique la curva trazada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son las componentes de la función vectorial $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = 3$. Como en el ejemplo 1, advertimos que un punto sobre la curva debe yacer sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Sin embargo, puesto que la coordenada z de cualquier punto tiene el valor constante $z = 3$, la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ traza un círculo en el plano 3 unidades arriba y paralelo al plano xy. Vea la FIGURA 12.1.5. ■

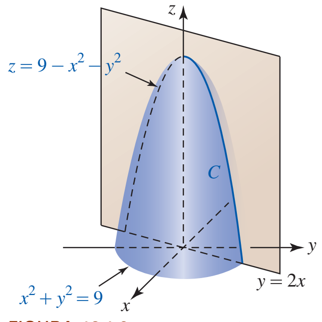


FIGURA 12.1.6 Curva C de intersección del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Curva de intersección de dos superficies

Determine la función vectorial que describe la curva C de intersección del plano $y = 2x$ y el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$.

Solución Primero se parametriza la curva C de intersección dejando $x = t$. Se deduce que $y = 2t$ y $z = 9 - t^2 - (2t)^2 = 9 - 5t^2$. De acuerdo con las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = 9 - 5t^2, \quad -\infty < t < \infty,$$

vemos que una función vectorial que describe el trazo del paraboloide en el plano $y = 2x$ está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (9 - 5t^2)\mathbf{k}.$$

Vea la FIGURA 12.1.6. ■

EJEMPLO 6 Curva de intersección de dos cilindros

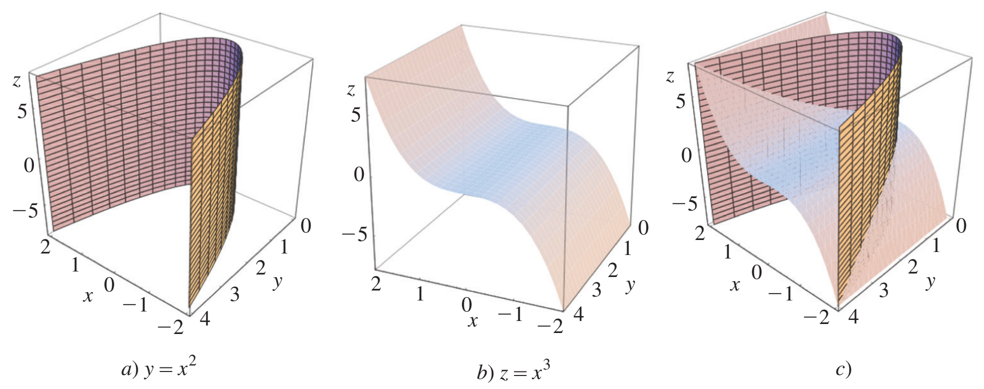
Encuentre la función vectorial que describe la curva C de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$.

Solución En el espacio bidimensional la gráfica de $y = x^2$ es una parábola en el plano xy y por ello en el espacio tridimensional es un cilindro parabólico cuyo bastidor es perpendicular al

plano xy, esto es, paralelo al eje z. Vea la FIGURA 12.1.7*a*). Por otro lado, $z = x^3$ puede interpretarse como un cilindro cúbico cuyo bastidor es perpendicular al plano xz, esto es, paralelo al eje y. Vea la figura 12.1.7*b*). Como en el ejemplo 5, si se deja $x = t$, entonces $y = t^2$ y $z = t^3$. Una función vectorial que describe a la curva C de intersección de los dos cilindros es entonces

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \tag{10}$$

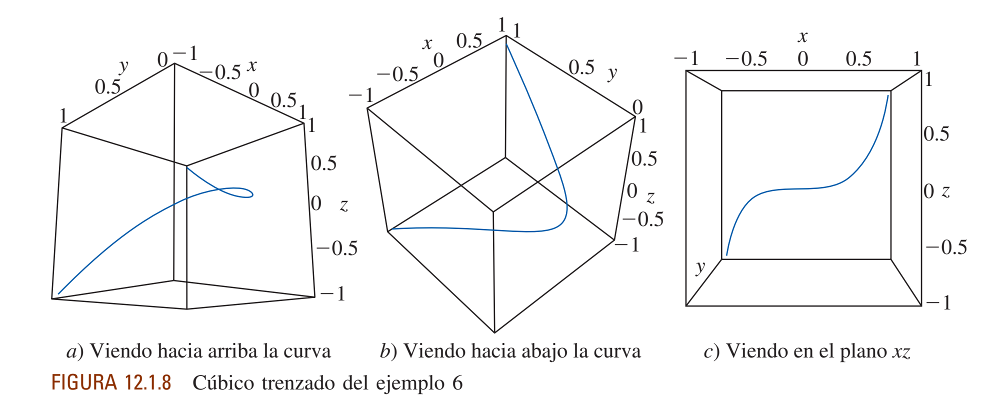
donde $-\infty < t < \infty$.



a) $y = x^2$ *b*) $z = x^3$ *c*)

FIGURA 12.1.7 *a*) y *b*) dos cilindros; *c*) curva C de intersección en el ejemplo 6 ■

La curva C definida por la función vectorial (10) recibe el nombre de **cúbica trenzada**. Con la ayuda de un SAC se ha graficado $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en la FIGURA 12.1.8. Las partes *a*) y *b*) de la figura muestran dos perspectivas, o puntos de vista, distintas de la curva C de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. En la figura 12.1.8*c*) advertimos la naturaleza cúbica de C utilizando un punto de vista que es hacia el plano xz. La cúbica trenzada tiene varias propiedades de interés para los matemáticos y por ello se estudia frecuentemente en cursos avanzados de geometría algebraica.



a) Viendo hacia arriba la curva *b*) Viendo hacia abajo la curva *c*) Viendo en el plano xz

FIGURA 12.1.8 Cúbico trenzado del ejemplo 6

Ejercicios 12.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-38.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre el dominio de la función vectorial dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t^2 - 9}\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
2. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + \ln(1 - t^2)\mathbf{j}$
3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} - \operatorname{sen}^{-1} t\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{k}$

En los problemas 5-8, escriba las ecuaciones paramétricas dadas como una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

5. $x = \operatorname{sen} \pi t,\ y = \cos \pi t,\ z = -\cos^2 \pi t$
6. $x = \cos^2 t,\ y = 2\operatorname{sen}^2 t,\ z = t^2$
7. $x = e^{-t},\ y = e^{2t},\ z = e^{3t}$
8. $x = -16t^2,\ y = 50t,\ z = 10$

En los problemas 9-12, escriba la función vectorial dada $\mathbf{r}(t)$ como ecuaciones paramétricas.

9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t(\mathbf{i} + \mathbf{k})$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = 5 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + 5 \cos 3t\mathbf{j} + 5 \cos t \operatorname{sen} 3t\mathbf{k}$

En los problemas 13-22, grafique la curva trazada por la función vectorial que se indica.

13. $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

14. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

16. $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t} \rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + 3 \operatorname{senh} t\mathbf{j}$

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{2} \operatorname{sen} t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, 2 \cos t \right\rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

20. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

21. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = \langle t \cos t, t \operatorname{sen} t, t^2 \rangle$

En los problemas 23 y 24, grafique la recta cuya función vectorial se indica.

23. $\mathbf{r}(t) = (4 - 4t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

24. $\mathbf{r}(t) = (2 + 3t)\mathbf{i} + (3 + 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$

25. Encuentre una función vectorial para el segmento de recta en el espacio bidimensional con orientación tal que $\mathbf{r}(t)$ traza la recta desde el punto (4, 0) hasta el (0, 3). Dibuje el segmento de recta.

26. Determine una función vectorial para el segmento de recta en el espacio tridimensional con orientación tal que $\mathbf{r}(t)$ traza la recta desde el punto (1, 1, 1) hasta (0, 0, 0). Dibuje el segmento de recta.

En los problemas 27-32, encuentre la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que describe la curva C de intersección entre las superficies dadas. Dibuje la curva C. Emplee el parámetro indicado.

27. $z = x^2 + y^2, y = x; \quad x = t$

28. $x^2 + y^2 - z^2 = 1, y = 2x; \quad x = t$

29. $x^2 + y^2 = 9, z = 9 - x^2; \quad x = 3 \cos t$

30. $z = x^2 + y^2, z = 1; \quad x = \operatorname{sen} t$

31. $x + y + z = 1, y = x; \quad x = t$

32. $3x - 2y + z = 6, x = 1; \quad y = t$

En los problemas 33-36, asocie la gráfica indicada con una de las funciones vectoriales en *a*)-*d*).

***a*)** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + \operatorname{sen} 3t\mathbf{k}$

***b*)** $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

***c*)** $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

***d*)** $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

33.

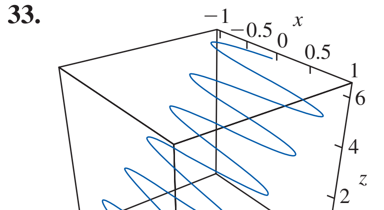


FIGURA 12.1.9 Gráfica del problema 33

34.

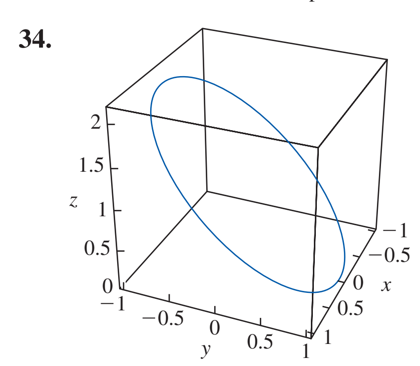


FIGURA 12.1.10 Gráfica del problema 34

35.

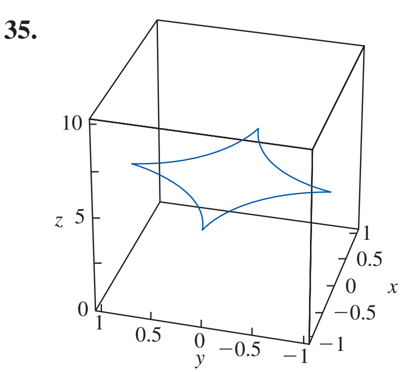


FIGURA 12.1.11 Gráfica del problema 35

36.

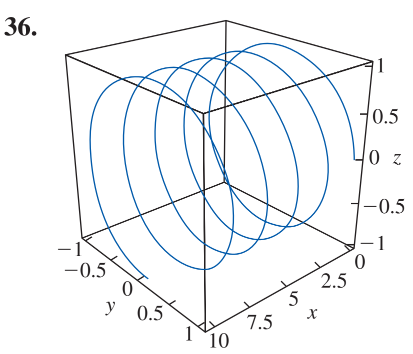


FIGURA 12.1.12 Gráfica del problema 36

37. Demuestre que los puntos sobre una hélice cónica

$$\mathbf{r}(t) = at \cos t\mathbf{i} + bt \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k},$$

$a > 0, b > 0, c > 0$, yacen sobre un cono elíptico cuya ecuación es

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

38. Una variación de la hélice cónica del problema 37 está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\cos t\mathbf{j} + t\,\text{sen}\,t\mathbf{k}.$$

a) antes de graficar $\mathbf{r}(t)$ analice la orientación de la curva.

b) Utilice un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$. Experimente con el intervalo del parámetro y el punto de vista de la curva.

39. La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = ae^{kt}\cos t\mathbf{i} + be^{kt}\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + ce^{kt}\mathbf{k},$$

$a > 0, b > 0, c > 0, k > 0$ describe también a una hélice cónica. Demuestre que los puntos sobre esta hélice cónica yacen sobre un cono elíptico cuya ecuación está dada en el problema 37.

40. Un caso especial de la curva en el problema 39 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}e^{0.05t}\cos t\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{0.05t}\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + e^{0.05t}\mathbf{k}.$$

a) Emplee un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$ en relación con $-30 \le t \le 30$.

b) Reexamine la figura 12.1.4*b*). Luego discuta la diferencia geométrica básica entre la hélice cónica en el problema 37 y la que se da en el problema 39.

41. Demuestre que los puntos sobre una hélice esférica

$$\mathbf{r}(t) = a\,\text{sen}\,kt\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + a\cos kt\mathbf{k}$$

yacen sobre una esfera de radio $a > 0$.

42. Un caso especial de la curva en el problema 41 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,kt\cos t\mathbf{i} + \text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + \cos kt\mathbf{k}.$$

Utilice un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$ respecto a $k = 1, 2, 3, 4, 10, 20$ y $0 \le t \le 2\pi$. Experimente con diferentes perspectivas de las gráficas.

43. *a*) Use un SAC para superponer las gráficas de los cilindros $z = 4 - x^2$ y $z = 4 - y^2$ sobre los mismos ejes de coordenadas.

b) Encuentre funciones vectoriales que describan las dos curvas de intersección de los cilindros.

c) Emplee un SAC para dibujar ambas curvas en el inciso *b*). Superponga las curvas sobre los mismos ejes de coordenadas. Experimente con la perspectiva hasta que la visualización de las gráficas tenga sentido.

44. Suponga que $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial no constante que define a una curva C con la propiedad $|\mathbf{r}(t)| = a$, donde $a > 0$ es una constante. Describa geométricamente a la curva C.

≡ Problemas con calculadora/SAC

45. Use un SAC para graficar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (10 + \text{sen}\,20t)\cos t\mathbf{i} + (10 + \text{sen}\,20t)\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$$

para $0 \le t \le 2\pi$. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica. Discuta por qué la curva se denomina una **espiral toroidal**.

46. Utilice un SAC para graficar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\arctan kt)\cos t\mathbf{i} + \cos(\arctan kt)\,\text{sen}\,t\mathbf{j} - \text{sen}(\arctan kt)\mathbf{k}$$

para $-10\pi \le t \le 10\pi$ y $k = 0.1, 0.2, 03$. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica. La curva se conoce como **espiral esférica**.

En los problemas 47 y 48, emplee un SAC para graficar la función vectorial dada relativa a los valores indicados de k. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica.

47. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + \text{sen}\,kt\cos t\mathbf{j} + \text{sen}\,t\mathbf{k}$; $k = 2, 4$

48. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \ln(kt)\,\text{sen}\,t\mathbf{k}$; $k = \frac{1}{10}, 1$

12.2 Cálculo de funciones vectoriales

Introducción En esta sección consideraremos el cálculo de funciones de valores vectoriales, en otras palabras, límites, derivadas e integrales de función vectorial. Como los conceptos son similares a los que se discutieron en la sección 10.3, se recomienda un repaso de esa sección.

Límites y continuidad La noción fundamental de **límite** de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ se define en términos de los límites de las funciones componentes.

Definición 12.2.1 Límite de una función vectorial

Si $\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$ y $\lim_{t\to a} h(t)$ existe, entonces

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\right\rangle. \quad (1)$$

El símbolo $t \to a$ en la definición 12.2.1 puede, desde luego, sustituirse por $t \to a^+$, $t \to a^-$, $t \to \infty$, o $t \to -\infty$.

Como una consecuencia inmediata de la definición 12.2.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 12.2.1 Propiedades de los límites

Suponga que a es un número real y $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t)$ y $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_2(t)$ existe. Si $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t)=\mathbf{L}_1$ y $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_2(t)=\mathbf{L}_2$, entonces

i) $\lim_{t\to a} c\mathbf{r}_1(t) = c\mathbf{L}_1$, c un escalar

ii) $\lim_{t\to a} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$

iii) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_1\cdot\mathbf{L}_2$.

Definición 12.2.2 Continuidad

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua** en el número a si

i) $\mathbf{r}(a)$ es definido, *ii)* $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)$ existe y *iii)* $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$.

Equivalentemente la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ es continua en un número a si y sólo si las funciones componentes f, g y h son continuas en a. Por brevedad, a menudo afirmamos que una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua en un número a si

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a). \tag{2}$$

Escribiendo (2) se supone que las condiciones *i)* y *ii)* de la definición 12.2.2 se cumplen en un número a.

Derivada de una función vectorial La definición de derivada $\mathbf{r}'(t)$ de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es el equivalente vectorial de la definición 3.1.1. En la siguiente definición se asume que h representa a un número real distinto de cero.

Definición 12.2.3 Derivada de una función vectorial

La **derivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h} \tag{3}$$

para toda t para la cual existe el límite.

La derivada de $\mathbf{r}$ también se escribe $d\mathbf{r}/dt$. El siguiente teorema muestra que en un nivel práctico, se obtiene la derivada de una función vectorial diferenciando simplemente sus funciones componentes.

Teorema 12.2.2 Diferenciación

Si las funciones componentes f, g y h son diferenciables, entonces la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ está dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN De (3) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\langle f(t+h), g(t+h), h(t+h)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\left\langle \frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \frac{g(t+h)-g(t)}{h}, \frac{h(t+h)-h(t)}{h}\right\rangle\\ &= \left\langle \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{h(t+h)-h(t)}{h}\right\rangle\\ &= \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle. \end{aligned}$$

■

Curvas suaves Cuando las funciones componentes de una función vectorial **r** tienen primeras derivadas continuas y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para toda t en un intervalo abierto (a, b), entonces **r** se dice que es una **función suave** y la curva C trazada por **r** se denomina **curva suave**.

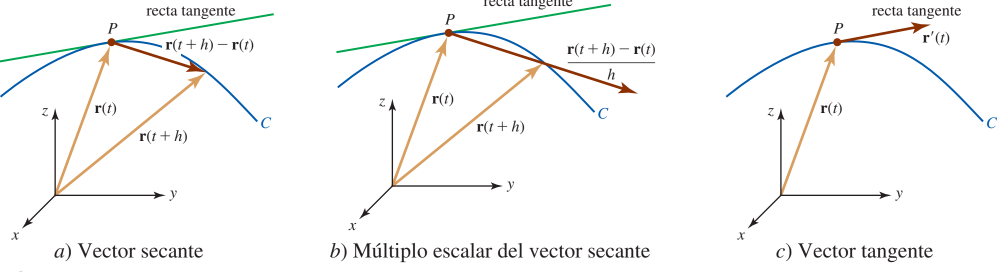
Interpretación geométrica de r′(t) Si el vector $\mathbf{r}'(t)$ existe y no es **0** en el punto P sobre la curva C definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, entonces la derivada $\mathbf{r}'(t)$ se define como el **vector tangente** a la curva en P. La justificación de lo anterior es similar a la discusión que llevó a la definición 2.7.1 en la sección 2.7. Como puede verse en las FIGURAS 12.2.1*a*) y *b*), para $h > 0$ el vector $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ y el múltiplo escalar

$$\frac{1}{h}\left[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)\right] = \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

son paralelos. Suponiendo que el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

existe, entonces los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t+h)$ se vuelven cada vez más cercanos cuando $h \to 0$. Como sugieren las figuras 12.2.1*b*) y *c*), la posición límite del vector $[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)]/h$ es un vector sobre la recta tangente en P. También definimos la **recta tangente** como la recta que pasa por P que es paralela al vector $\mathbf{r}'(t)$.



a) Vector secante *b*) Múltiplo escalar del vector secante *c*) Vector tangente

FIGURA 12.2.1 Vector tangente en P sobre una curva C

EJEMPLO 1 El vector r′(t)

Considere la curva C en el espacio bidimensional que es trazada por un punto P cuya posición está dada por $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j}, -\pi/2 \le t \le \pi/2$. Encuentre la derivada $\mathbf{r}'(t)$ y grafique los vectores $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$.

Solución La curva C es suave debido a que las funciones componentes de $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j}$ tienen derivadas continuas y $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ sobre el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. De (4),

$$\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}.$$

En consecuencia, $\quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} \quad$ y $\quad \mathbf{r}'(\pi/6) = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}.$

Para graficar C primero eliminamos el parámetro de las ecuaciones paramétricas $x = \cos 2t$, $y = \text{sen}\,t$:

$$x = \cos 2t = \cos^2 t - \text{sen}^2 t = 1 - 2\,\text{sen}^2 t = 1 - 2y^2.$$

Puesto que $-\pi/2 \le t \le \pi/2$, advertimos que la curva C es la porción de la parábola $x = 1 - 2y^2$ sobre el intervalo definido por $-1 \le x \le 1$. Los vectores $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$ se dibujan tangentes a la curva C en $(1, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, respectivamente. Vea la FIGURA 12.2.2. ■

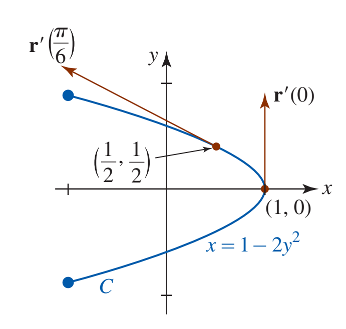


FIGURA 12.2.2 Curva C y vectores del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Ecuaciones paramétricas

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2$, $y = t^2 - t$, $z = -7t$ en el punto correspondiente a $t = 3$.

Solución La función vectorial que produce la posición de un punto P sobre la curva está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} - 7t\mathbf{k}$. Ahora,

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(3) = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

El vector $\mathbf{r}'(3)$ es tangente a C en el punto P cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(3) = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k},$$

esto es, en el punto $P(9, 6, -21)$. Al emplear las componentes de $\mathbf{r}'(3)$, advertimos que las ecuaciones paramétricas de la recta tangente son

$$x = 9 + 6t,\ y = 6 + 5t,\ z = -21 - 7t.$$ ■

Derivadas de orden superior Las derivadas de orden superior de una función vectorial se obtienen también diferenciando sus componentes. En el caso de la **segunda derivada**, tenemos

$$\mathbf{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t)\rangle = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}. \tag{5}$$

EJEMPLO 3 Vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$

Si $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}''(t) = (6t - 4)\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}.$$ ■

En el siguiente teorema se enlistan algunas reglas de diferenciación para funciones vectoriales.

Teorema 12.2.3 Reglas de diferenciación

Considere que $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son funciones vectoriales diferenciables y $f(t)$ es una función escalar diferenciable.

i) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$

ii) $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$

iii) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(f(t))] = \mathbf{r}'(f(t))f'(t)$ (regla de la cadena)

iv) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$

v) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t)$

DEMOSTRACIÓN DE *iv*) Si $\mathbf{r}_1(t) = \langle f_1(t), g_1(t), h_1(t)\rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle f_2(t), g_2(t), h_2(t)\rangle$, entonces por (2) de la sección 11.3 el producto punto es la función escalar

$$\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t) + h_1(t)h_2(t).$$

Después de usar la regla del producto agrupamos los términos en rojo y los términos que se muestran en azul:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) &= \frac{d}{dt}f_1(t)f_2(t) + \frac{d}{dt}g_1(t)g_2(t) + \frac{d}{dt}h_1(t)h_2(t)\\ &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) + h_1(t)h_2'(t) + h_1'(t)h_2(t)\\ &= \langle f_1(t), g_1(t), h_1(t)\rangle \cdot \langle f_2'(t), g_2'(t), h_2'(t)\rangle + \langle f_1'(t), g_1'(t), h_1'(t)\rangle \cdot \langle f_2(t), g_2(t), h_2(t)\rangle\\ &= \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t).\end{aligned}$$ ■

Nota: Puesto que el producto cruz de dos vectores no es conmutativo, el orden en el cual $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ aparecen en la parte *v*) del teorema 12.2.3 debe observarse estrictamente. Desde luego, en *iv*) y *v*) podemos efectuar el producto punto y el producto cruz primero y después diferenciar el escalar o la función vectorial resultantes.

Integrales de funciones vectoriales Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es una función vectorial continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces la integral indefinida de $\mathbf{r}$ está definida por

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

La integral indefinida de $\mathbf{r}$ es otro vector $\mathbf{R} + \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es un *vector constante*, tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Debido a la continuidad de las funciones componentes f, g y h, la integral definida de $\mathbf{r}(t)$ sobre $[a, b]$ puede definirse como

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{r}(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t \\ &= \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} h(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left[\int_a^b f(t)dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)dt\right]\mathbf{k}.$$

El teorema fundamental del cálculo, extendido a funciones vectoriales, es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a),$$

donde $\mathbf{R}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 4 Integrales

a) Si $\mathbf{r}(t) = 6t^2\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j} + 8\cos 4t\,\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)dt &= \left[\int 6t^2 dt\right]\mathbf{i} + \left[\int 4e^{-2t}dt\right]\mathbf{j} + \left[\int 8\cos 4t\,dt\right]\mathbf{k} \\ &= [2t^3 + c_1]\mathbf{i} + [-2e^{-2t} + c_2]\mathbf{j} + [2\,\text{sen}\,4t + c_3]\mathbf{k} \\ &= 2t^3\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,4t\,\mathbf{k} + \mathbf{C},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Las componentes c_1, c_2 y c_3 del último vector son constantes reales arbitrarias.

b) Si $\mathbf{r}(t) = (4t - 3)\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} + \dfrac{2}{1 + t^2}\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathbf{r}(t)dt &= (2t^2 - 3t)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 2\tan^{-1} t\,\mathbf{k}\Big]_{-1}^{1} \\ &= \left(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\cdot\frac{\pi}{4}\mathbf{k}\right) - \left(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\cdot\frac{\pi}{4}\mathbf{k}\right) \\ &= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}.\end{aligned}$$

■

Longitud de una curva espacial En la sección 10.3 vimos que la fórmula de la longitud de arco para una curva suave C en el espacio bidimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

De manera similar, si C es una curva suave en el espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \le t \le b,$$

entonces como hicimos en la sección 10.3 podemos construir una integral definida utilizando una trayectoria poligonal, como se ilustra en la FIGURA 12.2.3, para llegar a la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \tag{6}$$

FIGURA 12.2.3 Aproximación de la longitud de C (azul) por medio de la longitud de una trayectoria poligonal (rojo)

que define la **longitud** L de la curva entre los puntos $(f(a), g(a), h(a))$ y $(f(b), g(b), h(b))$. Si la curva C se traza por medio de una función suave de valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$, entonces su longitud entre el punto inicial en $t = a$ y el punto terminal en $t = b$ puede expresarse en términos de la magnitud de $\mathbf{r}'(t)$:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt. \tag{7}$$

En (7), $|\mathbf{r}'(t)|$ es

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \qquad \text{o} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

dependiendo de si C está en el espacio bidimensional o tridimensional, respectivamente.

Función de la longitud de arco La integral definida

Revise (5) en la sección 6.5.

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\,du \tag{8}$$

se llama la **función de longitud de arco** para la curva C. En (8) el símbolo u es una variable de integración sustituta. La función $s(t)$ representa la longitud de C entre los puntos sobre la curva definida por los vectores de posición $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$. Muchas veces es útil parametrizar una curva suave C en el plano o en el espacio en términos de la longitud de arco s. Al evaluar (8) se expresa s como una función del parámetro t. Si podemos resolver esa ecuación para t en términos de s, entonces es factible expresar $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$ o $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ como

$$\mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s)\rangle \qquad \text{o} \qquad \mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s), z(s)\rangle.$$

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para determinar una **parametrización de longitud de arco** $\mathbf{r}(s)$ para una curva C.

EJEMPLO 5 Una parametrización de longitud de arco

Encuentre una parametrización de longitud de arco de la hélice circular del ejemplo 2 de la sección 12.1:

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Solución De $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ se encuentra $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{5}$. Se deduce de (8) que la longitud de la curva empezando en $\mathbf{r}(0)$ hasta un punto arbitrario definido por $\mathbf{r}(t)$ es

$$s = \int_0^t \sqrt{5}\,du = \sqrt{5}u\Big]_0^t = \sqrt{5}t.$$

Al resolver $s = \sqrt{5}t$ para t se encuentra que $t = s/\sqrt{5}$. Al sustituir respecto a t en $\mathbf{r}(t)$ obtenemos una función vectorial de la hélice como una función de la longitud de arco:

$$\mathbf{r}(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{k}. \tag{9}$$

Las ecuaciones paramétricas de la hélice son entonces

$$x = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad y = 2\,\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad z = \frac{s}{\sqrt{5}}.$$ ■

Advierta que la derivada de la función vectorial (9) respecto a la longitud de arco s es

Es particularmente fácil encontrar una parametrización de longitud de arco de una recta $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Vea el problema 49 en los ejercicios 12.2.

$$\mathbf{r}'(s) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

y su magnitud es

$$|\mathbf{r}'(s)| = \sqrt{\frac{4}{5}\text{sen}^2\frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5}\cos^2\frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1.$$

El hecho de que $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ indica que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario. Esto no es coincidencia. Como hemos visto, la derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con respecto al parámetro t es un vector

tangente a la curva C trazada por $\mathbf{r}$. Sin embargo, si la curva C se parametriza en términos de la longitud de arco s, entonces:

- La derivada $\mathbf{r}'(s)$ es un vector tangente unitario. (10)

Para ver por qué esto es así, recuerde que la forma de la derivada del teorema fundamental del cálculo, teorema 5.5.2, muestra que la derivada de (8) con respecto a t es

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|. \tag{11}$$

Sin embargo, si la curva C es descrita por una parametrización de longitud de arco $\mathbf{r}(s)$, entonces (8) muestra que la longitud s de la curva de $\mathbf{r}(0)$ a $\mathbf{r}(s)$ es

$$s = \int_0^s |\mathbf{r}'(u)|\,du. \tag{12}$$

Como $\dfrac{d}{ds}s = 1$, la derivada de (12) con respecto a s es

$$\frac{d}{ds}s = |\mathbf{r}'(s)| \qquad \text{o} \qquad |\mathbf{r}'(s)| = 1.$$

En la siguiente sección veremos por qué (10) es importante.

Ejercicios 12.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-39.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-4, evalúe el límite dado o enuncie que éste no existe.

1. $\displaystyle\lim_{t\to 2}\,[t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^5\mathbf{k}]$
2. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}\mathbf{i} + (t-2)^5\mathbf{j} + t\ln t\,\mathbf{k}\right]$
3. $\displaystyle\lim_{t\to 1}\left\langle \frac{t^2-1}{t-1}, \frac{5t-1}{t+1}, \frac{2e^{t-1}-2}{t-1}\right\rangle$
4. $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left\langle \frac{e^{2t}}{2e^{2t}+t}, \frac{e^{-t}}{2e^{-t}+5}, \tan^{-1} t\right\rangle$

En los problemas 5 y 6, suponga que

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to a}\mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Encuentre el límite dado.

5. $\displaystyle\lim_{t\to a}\,[-4\mathbf{r}_1(t) + 3\mathbf{r}_2(t)]$
6. $\displaystyle\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$

En los problemas 7 y 8, determine si la función vectorial indicada es continua en $t = 1$.

7. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + \dfrac{1}{t+1}\mathbf{j} + \ln(t-1)\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}\pi t\,\mathbf{i} + \tan\pi t\,\mathbf{j} + \cos\pi t\,\mathbf{k}$

En los problemas 9 y 10, encuentre los dos vectores indicados para la función vectorial dada.

9. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + (5t^2 - t)\mathbf{k};\quad \mathbf{r}'(1), \dfrac{\mathbf{r}(1.1)-\mathbf{r}(1)}{0.1}$
10. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{1+5t}\mathbf{i} + (3t^2+t)\mathbf{j} + (1-t)^3\mathbf{k};\quad \mathbf{r}'(0), \dfrac{\mathbf{r}(0.05)-\mathbf{r}(0)}{0.05}$

En los problemas 11-14, determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para la función vectorial dada.

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j},\quad t > 0$
12. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t - \operatorname{sen} t, t + \cos t\rangle$
13. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{2t}, t^3, 4t^2 - t\rangle$
14. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \tan^{-1} t\,\mathbf{k}$

En los problemas 15-18, grafique la curva C que es descrita por $\mathbf{r}(t)$ y grafique $\mathbf{r}'(t)$ en el punto correspondiente al valor indicado de t.

15. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 6\operatorname{sen} t\,\mathbf{j};\quad t = \pi/6$
16. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\quad t = -1$
17. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{4}{1+t^2}\mathbf{k};\quad t = 1$
18. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k};\quad t = \pi/4$

En los problemas 19 y 20, encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t.

19. $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3;\quad t = 2$
20. $x = t^3 - t, y = \dfrac{6t}{t+1}, z = (2t+1)^2;\quad t = 1$

En los problemas 21 y 22, determine un vector tangente unitario para la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente en este punto.

21. $\mathbf{r}(t) = te^t\mathbf{i} + (t^2 + 2t)\mathbf{j} + (t^3 - t)\mathbf{k};\quad t = 0$
22. $\mathbf{r}(t) = (1 + \operatorname{sen} 3t)\mathbf{i} + \tan 2t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k};\quad t = \pi$

En los problemas 23 y 24, encuentre una función vectorial de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t.

23. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle; \quad t = \pi/3$

24. $\mathbf{r}(t) = \langle 6e^{-t/2}, e^{2t}, e^{3t} \rangle; \quad t = 0$

En los problemas 25-30, determine la derivada indicada. Suponga que todas las funciones vectoriales son diferenciables.

25. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)]$

26. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot (t\mathbf{r}(t))]$

27. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))]$

28. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$

29. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(2t) + \mathbf{r}_2(1/t)]$

30. $\dfrac{d}{dt}[t^3\mathbf{r}(t^2)]$

En los problemas 31-34, evalúe la integral dada.

31. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k})\,dt$

32. $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(\sqrt{2t+1}\,\mathbf{i} - \sqrt{t}\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}\right)dt$

33. $\displaystyle\int (te^t\mathbf{i} - e^{-2t}\mathbf{j} + te^{t^2}\mathbf{k})\,dt$

34. $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})\,dt$

En los problemas 35-38, encuentre una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que satisfaga las condiciones indicadas.

35. $\mathbf{r}'(t) = 6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}'(t) = t \operatorname{sen} t^2\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{j}; \quad \mathbf{r}(0) = \frac{3}{2}\mathbf{i}$

37. $\mathbf{r}''(t) = 12t\mathbf{i} - 3t^{-1/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{j}, \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}''(t) = \sec^2 t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \operatorname{sen} t\mathbf{k};$
$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{r}(0) = -\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 39-42, encuentre la longitud de la curva trazada por la función vectorial dada en el intervalo que se indica.

39. $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t \cos t\mathbf{j} + t \operatorname{sen} t\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le \pi$

41. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos 2t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 3\pi$

42. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + \sqrt{3}t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 1$

En los problemas 43-46, emplee (8) y la integración de $u = 0$ a $u = t$ para determinar una parametrización de longitud de arco $\mathbf{r}(s)$ para la curva dada. Verifique que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.

43. $\mathbf{r}(t) = 9 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 9 \cos t\mathbf{j}$

44. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 12t\mathbf{j} + 5 \operatorname{sen} t\mathbf{k}$

45. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (5 - 3t)\mathbf{j} + (2 + 4t)\mathbf{k}$

46. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

≡ Piense en ello

47. Suponga que $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable para la cual $|\mathbf{r}(t)| = c$ para toda t. Demuestre que el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$ para toda t.

48. Si $\mathbf{v}$ es un vector constante y $\mathbf{r}(t)$ es integrable sobre $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$.

49. Suponga que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ es una ecuación vectorial de una recta, donde $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}$ son vectores constantes. Utilice la función de longitud de arco $s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du$ para demostrar que una parametrización de longitud de arco de la recta está dada por $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Demuestre que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario. En otras palabras, para obtener una parametrización de longitud de arco de una recta sólo se necesita normalizar al vector $\mathbf{v}$.

50. Emplee los resultados del problema 49 para encontrar una parametrización de longitud de arco de cada una de las siguientes rectas.

a) $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 3t, 2 - 4t \rangle = \langle 1, 2 \rangle + t\langle 3, -4 \rangle$

b) $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1 + 2t, 10 - t \rangle$

12.3 Movimiento sobre una curva

Introducción Suponga que una partícula o cuerpo se mueve a lo largo de la curva C de manera que su posición en el tiempo t está dada por la función de valores vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

Podemos describir la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de derivadas de $\mathbf{r}(t)$.

Velocidad y aceleración Si f, g y h tienen segundas derivadas, entonces los vectores

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k} \tag{2}$$

se denominan la **velocidad** y la **aceleración** de la partícula, respectivamente. La función escalar

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} \tag{3}$$

es la **rapidez** de la partícula. La rapidez se relaciona con la longitud de arco. De (7) de la sección 12.2 se observa que si una curva C es trazada por una función de valores vectoriales suave

$\mathbf{r}(t)$, entonces su longitud entre el punto inicial en $t = a$ y el punto terminal en $t = b$ está dada por $L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$. En vista de (1) y (3), esto es lo mismo que

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}(t)|\, dt. \tag{4}$$

Si $P(x_1, y_1, z_1)$ es la posición de la partícula sobre la curva C en el tiempo t_1, entonces en vista de la discusión en la sección 12.2 acerca de la interpretación geométrica de $\mathbf{r}'(t)$ concluimos que

- $\mathbf{v}(t_1)$ es tangente a la curva C en P.

Se hacen comentarios similares para curvas trazadas por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$.

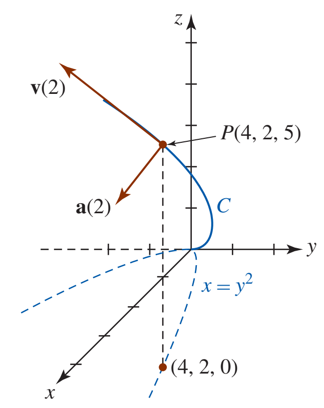


FIGURA 12.3.1 Vectores de velocidad y aceleración del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráfica de la velocidad y la aceleración

La posición de una partícula en movimiento está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{5}{2}t\mathbf{k}$. Grafique la curva C definida por $\mathbf{r}(t)$ y los vectores $\mathbf{v}(2)$ y $\mathbf{a}(2)$.

Solución Puesto que $x = t^2$, $y = t$, la trayectoria de la partícula está por arriba de la parábola $x = y^2$ que yace en el plano xy. Cuando $t = 2$, el vector de posición $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ indica que la partícula está en el punto $P(4, 2, 5)$ sobre C. Ahora,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{v}(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}.$$

Estos vectores se ilustran en la FIGURA 12.3.1. ■

Si una partícula se mueve con una rapidez constante c, entonces su vector de aceleración es perpendicular al vector de velocidad $\mathbf{v}$. Para ver lo anterior, advierta que

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = c^2.$$

Diferenciamos ambos lados con respecto a t, y con la ayuda del teorema 12.2.3*iv*) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Entonces,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 0 \quad \text{para toda } t. \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Gráfica de la velocidad y la aceleración

Suponga que la función vectorial del ejemplo 4 de la sección 12.1 representa la posición de una partícula que se mueve en una órbita circular. Grafique los vectores de velocidad y aceleración en $t = \pi/4$.

Solución La función de valores vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

es el vector de posición de una partícula que se mueve en una órbita circular de radio 2 en el plano $z = 3$. Cuando $t = \pi/4$, la partícula está en el punto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$. En este caso,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\cos t\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j}.$$

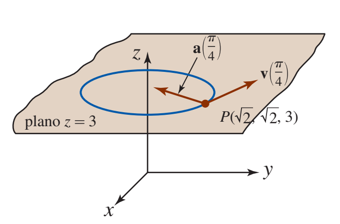


FIGURA 12.3.2 Vectores de velocidad y aceleración del ejemplo 2

Puesto que la rapidez $|\mathbf{v}(t)| = 2$ es constante para todo tiempo t, se sigue de (5) que $\mathbf{a}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{v}(t)$. (Verifique lo anterior.) Como se muestra en la FIGURA 12.3.2, los vectores

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$$

se dibujan en el punto P. El vector $\mathbf{v}(\pi/4)$ es tangente a la trayectoria circular en tanto que $\mathbf{a}(\pi/4)$ apunta a lo largo de un radio hacia el centro del círculo. ■

Aceleración centrípeta Para el movimiento circular en el plano, descrito mediante $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\mathbf{i} + r_0 \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$, r_0 y ω constantes, es evidente que $\mathbf{r}'' = -\omega^2\mathbf{r}$. Esto significa que el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ apunta en la dirección opuesta a la del vector de posición $\mathbf{r}(t)$. Afirmamos entonces que $\mathbf{a}(t)$ es la **aceleración centrípeta**. Vea la FIGURA 12.3.3. Si $v = |\mathbf{v}(t)|$ y $a = |\mathbf{a}(t)|$, se deja como ejercicio demostrar que $a = v^2/r_0$. Vea el problema 17 en los ejercicios 12.3.

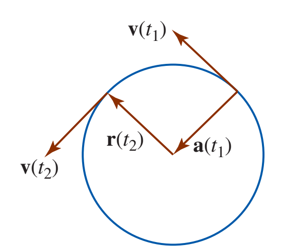


FIGURA 12.3.3 Vector de aceleración centrípeta **a**

Movimiento curvilíneo en el plano Muchas aplicaciones importantes de las funciones vectoriales ocurren en la descripción del movimiento curvilíneo en un plano. Por ejemplo, los movimientos planetarios y de proyectiles se efectúan en un plano. Al analizar el movimiento de proyectiles balísticos de corto alcance, se empieza con la aceleración de la gravedad escrita en forma vectorial

El proyectil se dispara o lanza en vez de autoimpulsarse. En el análisis del movimiento de balística de largo alcance, debe tomarse en cuenta la curvatura de la Tierra.

$$\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}.$$

Si, como se ilustra en la FIGURA 12.3.4, se lanza un proyectil con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \theta\mathbf{j}$, desde una altura inicial $\mathbf{s}_0 = s_0\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \int(-g\mathbf{j})dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1,$$

donde $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ implica que $\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0$. Por tanto,

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \theta)\mathbf{i} + (-gt + v_0 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}.$$

Al integrar de nuevo y utilizar $\mathbf{r}(0) = \mathbf{s}_0$ se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + s_0\right]\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil son

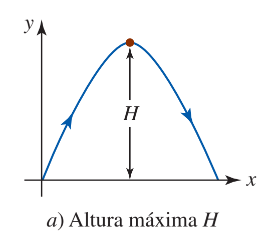
$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + s_0. \tag{6}$$

FIGURA 12.3.4 Proyectil balístico

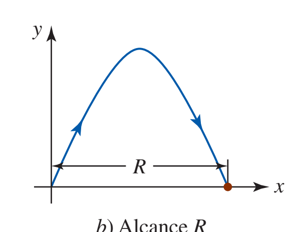
Vea (3) de la sección 10.2.

Existe un interés natural en determinar la altura máxima H y la distancia horizontal R máxima, o alcance, a la que llega el proyectil. Como se muestra en la FIGURA 12.3.5, estas cantidades son los valores máximos de $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente. Para calcular estos valores se determinan los tiempos t_1 y $t_2 > 0$ para los cuales $y'(t_1) = 0$ y $y(t_2) = 0$, respectivamente. Luego

$$H = y_{\text{máx}} = y(t_1) \qquad \text{y} \qquad R = x_{\text{máx}} = x(t_2). \tag{7}$$



a) Altura máxima *H*



b) Alcance *R*

FIGURA 12.3.5 Altura y alcance máximos de un proyectil

EJEMPLO 3 Movimiento de proyectiles

Un obús es lanzado desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 768 pies/s a un ángulo de elevación de 30°. Encuentre

***a*)** la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús,
***b*)** la altura máxima alcanzada,
***c*)** el alcance del obús y
***d*)** la rapidez en el impacto.

Solución

***a*)** En términos de vectores, la posición inicial del proyectil es $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ y su velocidad inicial corresponde a

$$\mathbf{v}_0 = (768 \cos 30°)\mathbf{i} + (768 \operatorname{sen} 30°)\mathbf{j} = 384\sqrt{3}\mathbf{i} + 384\mathbf{j}. \tag{8}$$

Al integrar $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$ y utilizar (8), se obtiene

$$\mathbf{v}(t) = (384\sqrt{3})\mathbf{i} + (-32t + 384)\mathbf{j}. \qquad (9)$$

Al integrar (9) y emplear $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ se encuentra la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (384\sqrt{3}t)\mathbf{i} + (-16t^2 + 384t)\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús son

$$x(t) = 384\sqrt{3}t, \quad y(t) = -16t^2 + 384t. \qquad (10)$$

***b*)** De (10) advertimos que $dy/dt = 0$ cuando

$$-32t + 384 = 0 \qquad \text{o} \qquad t = 12.$$

Entonces, de acuerdo con la primera parte de (7), la altura máxima H alcanzada por el obús es

$$H = y(12) = -16(12)^2 + 384(12) = 2\,304 \text{ pies}.$$

***c*)** De (6) vemos que $y(t) = 0$ cuando

$$-16t(t - 24) = 0 \qquad \text{o} \qquad t = 0, t = 24.$$

De la segunda parte de (7), el alcance R del obús es

$$R = x(24) = 384\sqrt{3}(24) \approx 15\,963 \text{ pies}.$$

***d*)** De (9) obtenemos la rapidez de impacto del obús:

$$|\mathbf{v}(24)| = \sqrt{(384\sqrt{3})^2 + (-384)^2} = 768 \text{ pies/s}. \qquad ■$$

r(t) NOTAS DESDE EL AULA

En la página 667 vimos que la tasa de cambio de la longitud de arco dL/dt es la misma que la rapidez $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, *no* se deduce que la *aceleración escalar* d^2L/dt^2 es la misma que $|\mathbf{a}(t)| = |\mathbf{r}''(t)|$. Vea el problema 18 en los ejercicios 12.3.

Ejercicios 12.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-39.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento. Grafique la curva y los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo indicado. Encuentre la rapidez en ese tiempo.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^4\mathbf{j}; \quad t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j}; \quad t = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = -\cosh 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen h} 2t\mathbf{j}; \quad t = 0$

4. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j}; \quad t = \pi/3$

5. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + (t-1)^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = 2$

6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad t = 2$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = 1$

9. Suponga que $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 5t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento.

***a*)** ¿En qué puntos la partícula pasa por el plano xy?

***b*)** ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en los puntos del inciso *a*)?

10. Suponga que una partícula se mueve en el espacio de manera que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ para todo tiempo t. Describa su trayectoria.

11. Un obús se lanza desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 480 pies/s a un ángulo de elevación de 30°. Encuentre:

***a*)** una función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús,

***b*)** la altura máxima alcanzada,

***c*)** el alcance del obús y

***d*)** la rapidez en el impacto.

12. Vuelva a trabajar el problema 11 si el obús se lanza con la misma rapidez inicial y el mismo ángulo de elevación pero desde un acantilado a 1 600 pies de altura.

13. Un automóvil se empuja con una rapidez de 4 pies/s desde un escarpado acantilado frente al mar que tiene una altura de 81 pies. Encuentre la rapidez a la cual el automóvil golpea el agua.

14. Un pequeño proyectil se lanza desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 98 m/s. Encuentre los ángulos posibles de elevación de manera que su alcance sea de 490 m.

15. Un mariscal de campo de futbol americano lanza una “bomba” de 100 yardas a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la rapidez inicial del balón en el punto de lanzamiento?

16. Un mariscal de campo lanza un balón de futbol con la misma rapidez inicial a un ángulo de 60° desde la horizontal y después a un ángulo de 30° desde la horizontal. Muestre que el alcance del balón es el mismo en cada caso. Generalice este resultado para cualquier ángulo de lanzamiento $0 < \theta < \pi/2$.

17. Suponga que $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\, \mathbf{i} + r_0 \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$ es el vector de posición de un objeto que se está moviendo en un círculo de radio r_0 en el plano xy. Si $|\mathbf{v}(t)| = v$, muestre que la magnitud de la aceleración centrípeta es $a = |\mathbf{a}(t)| = v^2/r_0$.

18. El movimiento de una partícula en el espacio tridimensional se describe mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

a) Calcule $|\mathbf{v}(t)|$.

b) Calcule la función de longitud de arco $s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(u)|\, du$ y verifique que ds/dt es la misma que el resultado del inciso *a*).

c) Verifique que $d^2s/dt^2 \neq |\mathbf{a}(t)|$.

Aplicaciones

19. Se lanza un proyectil desde un cañón directamente a un blanco que se deja caer desde el reposo en forma simultánea cuando se dispara el cañón. Demuestre que el proyectil golpeará al blanco en el aire. Vea la FIGURA 12.3.6. [*Sugerencia*: Suponga que el origen está en la boca del cañón y que el ángulo de elevación es θ. Si $\mathbf{r}_p$ y $\mathbf{r}_t$ son los vectores de posición del proyectil y el blanco, respectivamente, ¿hay algún tiempo en el cual $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$?]

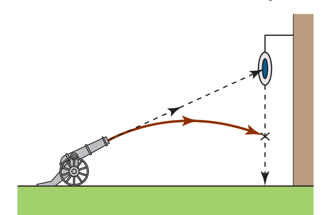


FIGURA 12.3.6 Cañón y blanco del problema 19

20. Para dar abasto a las víctimas de un desastre natural, se dejan caer simplemente equipo sólido y resistente así como paquetes de suministros de alimentos/medicinas desde aviones que vuelan horizontalmente a baja rapidez y altura. Un avión de suministros viaja horizontalmente sobre un blanco a una altura de 1 024 pies y una rapidez constante de 180 mi/h. Emplee (2) para determinar la distancia horizontal que recorre un paquete de suministros con relación al punto desde el cual se dejó caer. ¿A qué ángulo de la línea visual α debe soltarse el paquete de suministro para que dé en el blanco indicado en la FIGURA 12.3.7?

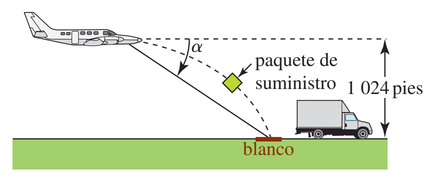


FIGURA 12.3.7 Avión de suministro del problema 20

21. El **peso efectivo** w_e de un cuerpo de masa m en el ecuador de la Tierra se define mediante $w_e = mg - ma$, donde a es la magnitud de la aceleración centrípeta dada en el problema 17. Determine el peso efectivo de una persona de 192 lb si el radio de la Tierra es de 4 000 mi, $g = 32$ pies/s^2 y $v = 1\,530$ pies/s.

22. Considere un ciclista que viaja sobre una pista circular plana de radio r_0. Si m es la masa combinada del ciclista y la bicicleta, llene los blancos de la FIGURA 12.3.8. [*Sugerencia*: Refiérase al problema 17 y a *fuerza* = *masa* × *aceleración*. Suponga que las direcciones positivas son hacia arriba y a la izquierda.] El vector **resultante U** da la dirección a la cual el ciclista debe inclinarse para evitar caer. Encuentre el ángulo ϕ respecto de la vertical al cual el ciclista debe inclinarse si su rapidez es de 44 pies/s y el radio de la pista es de 60 pies.

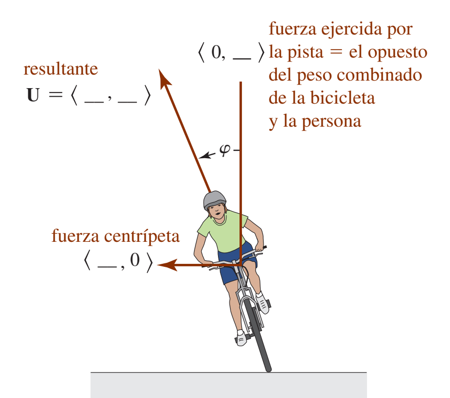


FIGURA 12.3.8 Ciclista del problema 22

23. Emplee el resultado que se obtuvo en (6) para demostrar que la trayectoria de un proyectil balístico es parabólica.

24. Se lanza un proyectil con una rapidez inicial v_0 desde el suelo a un ángulo de elevación θ. Emplee (6) para demostrar que la altura y el alcance máximos del proyectil son

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g} \quad \text{y} \quad R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g},$$

respectivamente.

25. La velocidad de una partícula que se mueve en un fluido se describe por medio de un **campo de velocidades** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, donde las componentes v_1, v_2 y v_3 son funciones de x, y, z y el tiempo t. Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}(t) = 6t^2x\mathbf{i} - 4ty^2\mathbf{j} + 2t(z+1)\mathbf{k}$, determine $\mathbf{r}(t)$. [*Sugerencia*: Emplee separación de variables. Vea la sección 8.1 o la sección 16.1.]

26. Suponga que m es la masa de una partícula en movimiento. La segunda ley del movimiento de Newton puede escribirse en forma vectorial como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se denomina el **momento lineal**. El **momento angular** de la partícula respecto al origen se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde $\boldsymbol{r}$ es el vector de posición. Si el movimiento de torsión de la partícula alrededor del origen es $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$, demuestre que τ es la tasa de cambio en el tiempo del momento angular.

27. Suponga que el Sol se localiza en el origen. La fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ ejercida sobre un planeta de masa m por el Sol de masa M es

$$\mathbf{F} = -k\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u}.$$

F es una **fuerza central**, esto es, una fuerza dirigida a lo largo del vector de posición **r** del planeta. Aquí k es la constante gravitacional (vea la página 369), $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de **r**, y el signo menos indica que **F** es una fuerza atractiva, esto es, una fuerza dirigida hacia el Sol. Vea la FIGURA 12.3.9.

a) Emplee el problema 26 para demostrar que el momento de torsión que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza central es **0**.

b) Explique por qué el momento angular **L** del planeta es constante.

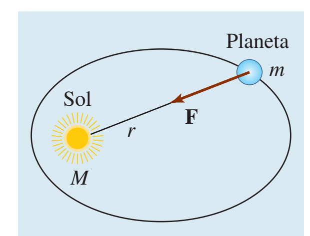


FIGURA 12.3.9 Vector de fuerza central **F** del problema 27

Piense en ello

28. Un cañón lanza una bala horizontalmente como se indica en la FIGURA 12.3.10.

a) Cuanto mayor es la cantidad de pólvora que se utiliza, tanto mayor resulta la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la bala de cañón y mayor la distancia a la que llega. Con argumentos matemáticos sólidos explique la razón.

b) Si se ignora la resistencia del aire, explique por qué la bala de cañón siempre alcanza el suelo en el mismo tiempo, independientemente del valor de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0 > 0$.

c) Si la bala de cañón se suelta simplemente desde la altura s_0 que se indica en la figura 12.3.10, muestre que el tiempo en el que golpea el suelo es el mismo que el tiempo en el inciso *b*).

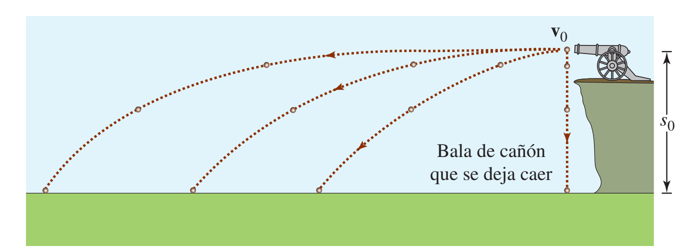


FIGURA 12.3.10 Cañón del problema 28

Proyectos

29. En este proyecto usted empleará las propiedades de las secciones 11.4 y 12.1 para demostrar la **primera ley de Kepler del movimiento planetario**.

- La órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco.

Se supone que el Sol es de masa M y está ubicado en el origen, **r** es el vector de posición de un cuerpo de masa m que se mueve bajo la atracción gravitacional del Sol y $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de **r**.

a) Emplee el problema 27 y la segunda ley del movimiento de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para demostrar que

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{kM}{r^2}\mathbf{u}.$$

b) Utilice el inciso *a*) para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{0}$.

c) Utilice el inciso *b*) para demostrar que $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

d) Se deduce del inciso *c*) que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, donde **c** es un vector constante. Demuestre que $\mathbf{c} = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$.

e) Demuestre que $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$ y consecuentemente $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$.

f) Utilice los incisos *a*), *d*) y *e*) para demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = kM\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

g) Después de integrar el resultado en el inciso *f*) respecto a t, se deduce que $\mathbf{v} \times \mathbf{c} = kM\mathbf{u} + \mathbf{d}$, donde **d** es otro vector constante. Efectúe el producto punto en ambos lados de esta última expresión con el vector $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ y utilice el problema 61 de los ejercicios 11.4 para demostrar que

$$r = \frac{c^2/kM}{1 + (d/kM)\cos\theta},$$

donde $c = |\mathbf{c}|$, $d = |\mathbf{d}|$ y θ es el ángulo entre **d** y **r**.

h) Explique por qué el resultado del inciso *c*) prueba la primera ley de Kepler.

i) En el perihelio (vea la página 595), los vectores **r** y **v** son perpendiculares y tienen magnitudes r_0 y v_0, respectivamente. Emplee esta información y los incisos *d*) y *g*) para demostrar que $c = r_0v_0$ y $d = r_0v_0^2 - kM$.

12.4 Curvatura y aceleración

Introducción Sea C una curva suave en el espacio bidimensional o tridimensional que es trazada por la función de valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$. En esta sección consideraremos con mayor detalle el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$, introducido en la sección anterior. Sin embargo, antes de hacer esto, es necesario examinar una cantidad escalar llamada **curvatura** de una curva.

Curvatura Si $\mathbf{r}(t)$ define a una curva C, entonces se sabe que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente en un punto P sobre C. En consecuencia,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \tag{1}$$

es una **tangente unitaria**. Sin embargo, es necesario recordar del final de la sección 12.2 que si C es parametrizada por una longitud de arco s, entonces la tangente unitaria a la curva también está dada por $d\mathbf{r}/ds$. Como vimos en (11) de la sección 12.3, la cantidad $|\mathbf{r}'(t)|$ en (1) se relaciona con la función de longitud de arco s por medio de $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$. Puesto que la curva C es suave, se sabe de la página 667 que $ds/dt > 0$. Por consiguiente, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

y por ello

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}(t). \tag{2}$$

FIGURA 12.4.1 El vector tangente cambia con respecto a la longitud de arco

Suponga ahora que C es como se ilustra en la FIGURA 12.4.1. Conforme s aumenta, $\mathbf{T}$ se mueve a lo largo de C cambiando dirección pero no longitud (siempre es de longitud unitaria). A lo largo de la parte de la curva entre P_1 y P_2 el vector $\mathbf{T}$ varía poco en dirección; a lo largo de la curva entre P_2 y P_3, donde C se dobla obviamente en forma más pronunciada, el cambio en la dirección de la tangente $\mathbf{T}$ es más pronunciado. Utilizaremos la *tasa* a la cual el vector unitario $\mathbf{T}$ cambia de dirección respecto a la longitud de arco como un indicador de la *curvatura* de una curva suave C.

Definición 12.4.1 Curvatura

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial que define a una curva suave C. Si s es el parámetro de longitud de arco y $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es el vector tangente unitario, entonces la **curvatura** de C en un punto P se define como

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|. \tag{3}$$

El símbolo κ en (3) es la letra griega kappa. Ahora, puesto que las curvas a menudo no se parametrizan por medio de la longitud de arco, es conveniente expresar (3) en términos de un parámetro general t. Al emplear de nuevo la regla de la cadena, es posible escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{y consecuentemente} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}.$$

En otras palabras, la curvatura definida en (3) produce

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Curvatura de un círculo

Encuentre la curvatura de un círculo de radio a.

Solución Un círculo puede describirse por medio de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$. En este caso, de $\mathbf{r}'(t) = -a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$ y $|\mathbf{r}'(t)| = a$ obtenemos

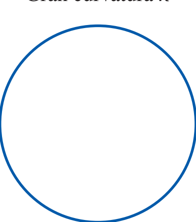
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con (4) la curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}}{a} = \frac{1}{a}. \tag{5}$$



Gran curvatura κ



Pequeña curvatura κ

FIGURA 12.4.2 Curvatura de un círculo en el ejemplo 1

El resultado en (5) muestra que la curvatura en un punto sobre un círculo es el recíproco del radio del círculo e indica un hecho que concuerda con nuestra intuición: un círculo con un radio pequeño se curva más que uno con un radio más grande. Vea la FIGURA 12.4.2. ■

Componentes tangencial y normal de la aceleración Suponga que una partícula se mueve en el espacio bidimensional o tridimensional sobre una curva suave C descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Entonces la velocidad de la partícula sobre C es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, en tanto que su rapidez corresponde a $ds/dt = v = |\mathbf{v}(t)|$. Entonces, (1) implica $\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}(t)$. Diferenciando esta última expresión con respecto a t obtenemos la aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = v\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{6}$$

Además, con ayuda del teorema 12.2.1*iii*) se deduce de la diferenciación de $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ que $\mathbf{T}\cdot d\mathbf{T}/dt = 0$. Por consiguiente, en un punto P sobre C los vectores $\mathbf{T}$ y $d\mathbf{T}/dt$ son ortogonales. Si $|d\mathbf{T}/dt| \neq 0$, entonces el vector

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \tag{7}$$

es una normal unitaria a la curva C en P con dirección dada por $d\mathbf{T}/dt$. El vector $\mathbf{N}$ se denomina **vector normal principal**, o simplemente **normal unitaria**. Sin embargo, puesto que la curvatura es $\kappa(t) = |\mathbf{T}'(t)|/v$, se sigue de (7) que $d\mathbf{T}/dt = \kappa v\mathbf{N}$. Entonces, (6) se convierte en

$$\mathbf{a}(t) = \kappa v^2\mathbf{N} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{8}$$

Escribiendo (8) como

$$\mathbf{a}(t) = a_N\mathbf{N} + a_T\mathbf{T} \tag{9}$$

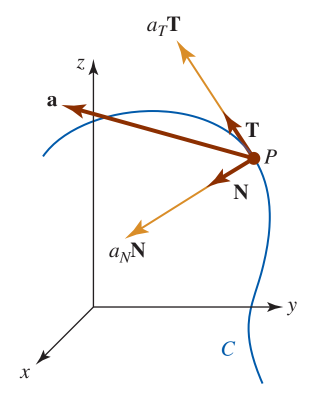


FIGURA 12.4.3 Componentes del vector aceleración

advertimos que el vector aceleración **a** de la partícula en movimiento es la suma de dos vectores ortogonales $a_N\mathbf{N}$ y $a_T\mathbf{T}$. Vea la FIGURA 12.4.3. Las funciones escalares

$$a_T = dv/dt \qquad \text{y} \qquad a_N = \kappa v^2$$

se llaman **componentes tangencial** y **normal de la aceleración**, respectivamente. Note que la componente tangencial de la aceleración resulta de un cambio en la *magnitud* de la velocidad **v**, mientras que la componente normal de la aceleración proviene de un cambio en la *dirección* de **v**.

La binormal Un tercer vector definido por el producto cruz

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \tag{10}$$

recibe el nombre de **vector binormal**. Los tres vectores unitarios **T**, **N** y **B** forman un conjunto de mano derecha de vectores mutuamente ortogonales denominado **triedro móvil**. El plano de **T** y **N** se denomina **plano osculante**, el plano **N** y **B** se dice que es el **plano normal**, y el plano de **T** y **B** es el **plano de rectificación**. Vea la FIGURA 12.4.4.

Literalmente, las palabras "plano osculante" significan "plano del besador".

Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales **T**, **N**, **B** pueden considerarse como un sistema de coordenadas de mano derecha móvil, ya que

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t), \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t), \quad \mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t).$$

Este sistema de coordenadas móvil se conoce como **marco TNB**.

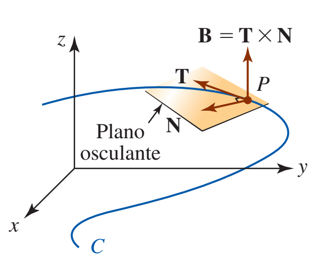


FIGURA 12.4.4 Triedro móvil y plano osculante

EJEMPLO 2 Determinación de T, N y B

En el espacio tridimensional la posición de una partícula en movimiento está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Encuentre los vectores $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$. Determine la curvatura $\kappa(t)$.

Solución Puesto que $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, y por ello de (1) advertimos que una tangente unitaria es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\text{sen}\, t\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Después de esto, se tiene

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\text{sen}\, t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Por consiguiente, (7) produce la normal principal

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}.$$

De tal manera, de (10) la binormal es

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\operatorname{sen} t & \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Por último, al emplear $|\mathbf{T}'(t)| = 2/\sqrt{13}$ y $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, encontramos de (4) que la curvatura en cualquier punto es la constante

$$\kappa(t) = \frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}. \qquad \blacksquare$$

El hecho de que la curvatura $\kappa(t)$ en el ejemplo 2 es constante no es una sorpresa, ya que la curva definida por $\mathbf{r}(t)$ es una hélice circular.

EJEMPLO 3 Planos osculante, normal y de rectificación

En el punto correspondiente a $t = \pi/2$ sobre la hélice circular del ejemplo 2, encuentre una ecuación de

a) el plano osculante,
b) el plano normal y
c) el plano de rectificación.

Solución De $\mathbf{r}(\pi/2) = \langle 0, 2, 3\pi/2\rangle$ el punto en cuestión es $(0, 2, 3\pi/2)$.

a) De (11) un vector normal al plano osculante en P es

$$\mathbf{B}(\pi/2) = \mathbf{T}(\pi/2) \times \mathbf{N}(\pi/2) = \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Para encontrar una ecuación de un plano no se requiere una normal *unitaria*, por lo que en lugar de $\mathbf{B}(\pi/2)$ es un poco más simple usar $\langle 3, 0, 2\rangle$. De (2) de la sección 11.6, una ecuación del plano osculante es

$$3(x - 0) + 0(y - 2) + 2\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad 3x + 2z = 3\pi.$$

b) En el punto P, el vector $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 0, 3\rangle$ o $\langle -2, 0, 3\rangle$ es normal al plano que contiene $\mathbf{N}(\pi/2)$ y $\mathbf{B}(\pi/2)$. Consecuentemente, una ecuación del plano normal es

$$-2(x - 0) + 0(y - 2) + 3\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad -4x + 6z = 9\pi.$$

c) Por último, en el punto P, el vector $\mathbf{N}(\pi/2) = \langle 0, -1, 0\rangle$ es normal al plano que contiene $\mathbf{T}(\pi/2)$ y $\mathbf{B}(\pi/2)$. Una ecuación del plano de rectificación es

$$0(x - 0) + (-1)(y - 2) + 0\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad y = 2. \qquad \blacksquare$$

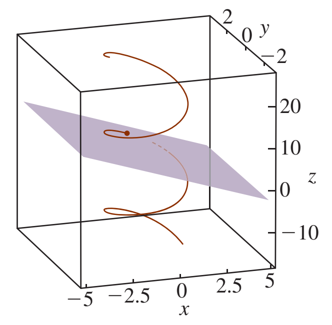


FIGURA 12.4.5 Hélice y plano osculante del ejemplo 3

En la FIGURA 12.4.5 se presentan porciones de la hélice y del plano osculante del ejemplo 3. El punto $(0, 2, 3\pi/2)$ se indica en la figura mediante el punto rojo.

Fórmulas para a_T, a_N y la curvatura Efectuando primero al producto punto y después el producto cruz, para el vector $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con el vector de aceleración (9), es posible obtener fórmulas explícitas que impliquen a $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}''$ para las componentes tangencial y normal de la aceleración y la curvatura. Observe que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = a_N(\underbrace{v\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}}_{0}) + a_T(\underbrace{v\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}}_{1}) = a_T v$$

produce la componente tangencial de la aceleración:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{12}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = a_N(\underbrace{v\mathbf{T} \times \mathbf{N}}_{\mathbf{B}}) + a_T(\underbrace{v\mathbf{T} \times \mathbf{T}}_{\mathbf{0}}) = a_N v\mathbf{B}.$$

Puesto que $|\mathbf{B}| = 1$, se concluye que la componente normal de la aceleración es

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{13}$$

Resolviendo (13) para la curvatura κ, obtenemos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \tag{14}$$

EJEMPLO 4 Determinación de a_T, a_N y κ

La curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ es una variación del cúbico trenzado que se discutió en la sección 12.1. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula que se mueve sobre una curva C, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier punto sobre C. Encuentre la curvatura.

Solución De

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

encontramos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = t + 2t^3$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + t^2 + t^4}$. Por consiguiente, de (12) obtenemos

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

En este caso,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$. Por tanto, (13) produce

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

Por último, de (14) encontramos que la curvatura del cúbico trenzado está dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}.$$

■

Radio de curvatura El recíproco de la curvatura, $\rho = 1/\kappa$, se denomina **radio de curvatura**. El radio de curvatura en un punto P sobre una curva C es el radio de un círculo que "encaja" en la curva mejor que cualquier otro círculo. El círculo en P se denomina **círculo de curvatura** y su centro es el **centro de curvatura**. El círculo de curvatura tiene la misma recta tangente en P que la curva C, y su centro yace sobre el lado cóncavo de C. Por ejemplo, un automóvil que se mueve sobre una pista curva, como se ilustra en la FIGURA 12.4.6, puede considerarse en cualquier instante como si se moviera sobre un círculo de radio ρ. En consecuencia, la componente normal de su aceleración $a_N = kv^2$ debe ser la misma que la magnitud de su aceleración centrípeta $a = v^2/\rho$. Por tanto, $\kappa = 1/\rho$ y $\rho = 1/\kappa$. Conociendo el radio de curvatura, es posible determinar la rapidez v a la cual el automóvil puede superar la curva peraltada sin patinarse. (Ésta es esencialmente la idea en el problema 22 en los ejercicios 12.3.)

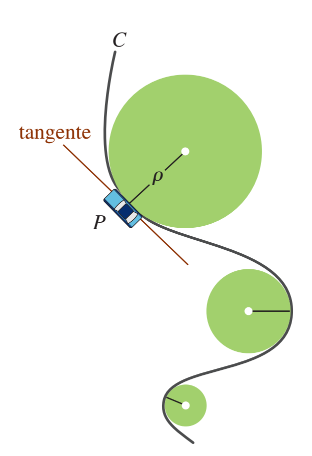


FIGURA 12.4.6 Círculo y radio de curvatura

r(t) NOTAS DESDE EL AULA

Al escribir (6) como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}$$

observamos que la llamada aceleración escalar d^2s/dt^2, referida en las *Notas desde el aula* de la sección 12.3, es vista ahora como la componente tangencial a_T de la aceleración $\mathbf{a}(t)$.

Ejercicios 12.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-40.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, para la función de posición dada, encuentre la tangente unitaria $\mathbf{T}(t)$.

1. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (t\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},\ t > 0$
2. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}$
3. Use el procedimiento descrito en el ejemplo 2 para determinar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ y $\kappa(t)$ en relación con el movimiento sobre una hélice circular general que se describe mediante $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$.
4. Emplee el procedimiento descrito en el ejemplo 2 para mostrar en el cúbico trenzado del ejemplo 4 que en $t = 1$:

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \qquad \mathbf{N}(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{B}(1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \kappa(1) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

En los problemas 5 y 6, encuentre una ecuación de

a) el plano osculante,
b) el plano normal y
c) el plano de rectificación para la curva espacial dada en el punto que corresponde al valor indicado de t.

5. La hélice circular en el ejemplo 2; $t = \pi/4$
6. El cúbico trenzado del ejemplo 4; $t = 1$

En los problemas 7-16, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula en movimiento. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t.

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
12. $\mathbf{r}(t) = \tan^{-1}t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{r}(t) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
14. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$
15. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
16. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + (4t + 2)\mathbf{k}$
17. Encuentre la curvatura de una hélice elíptica que se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
18. *a*) Encuentre la curvatura de una órbita elíptica que se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
    b) Demuestre que cuando $a = b$, la curvatura de una órbita circular es la constante $\kappa = 1/a$.
19. Demuestre que la curvatura de una línea recta es la constante $\kappa = 0$. [*Sugerencia*: Utilice (1) de la sección 11.5.]
20. Encuentre la curvatura de la cicloide que se describe mediante

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j},\ a > 0 \text{ en } t = \pi.$$

21. Considere que C es una curva plana trazada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g tienen segundas derivadas. Demuestre que la curvatura en un punto está dada por

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\left([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\right)^{3/2}}.$$

22. Demuestre que si $y = f(x)$, la fórmula para la curvatura κ en el problema 21 se reduce a

$$\kappa = \frac{|F''(x)|}{[1 + (F'(x))^2]^{3/2}}.$$

En los problemas 23 y 24, utilice el resultado del problema 22 para encontrar la curvatura y el radio de curvatura de la curva en los puntos indicados. Decida en cuáles puntos la curva es "más angulosa".

23. $y = x^2$; $(0, 0), (1, 1)$
24. $y = x^3$; $(-1, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$
25. Dibuje la gráfica de la curvatura $y = \kappa(x)$ para la parábola del problema 23. Determine el comportamiento de $y = \kappa(x)$ cuando $x \to \pm\infty$. En otras palabras, describa este comportamiento en términos geométricos.

Problemas con calculadora/SAC

26. En el ejemplo 4 se demostró que la curvatura para $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ está dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}.$$

a) Utilice un SAC para obtener la gráfica de $y = \kappa(t)$ con $-3 \le t \le 3$.

b) Utilice un SAC para obtener $\kappa'(t)$ y los números críticos de la función $y = \kappa(t)$.

c) Encuentre el valor máximo de $y = \kappa(t)$ y aproxime los puntos correspondientes sobre la curva trazada por $\mathbf{r}(t)$.

Piense en ello

27. Suponga que $(c, F(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y = F(x)$ y que F'' existe para toda x en algún intervalo que contenga a C. Analice la curvatura cerca de $(c, F(c))$.

28. Demuestre que $|\mathbf{a}(t)|^2 = a_N^2 + a_T^2$.

Revisión del capítulo 12

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-40.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-10, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. Una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$ se mueve con rapidez constante. _____
2. Un círculo tiene curvatura constante. _____
3. El vector binormal es perpendicular al plano osculante. _____
4. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, entonces el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ y el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ son ortogonales. _____
5. Si s es la longitud de arco de una curva C, entonces la magnitud de velocidad de una partícula en movimiento sobre C es ds/dt. _____
6. Si s es la longitud de arco de una curva C, entonces la magnitud de la aceleración de una partícula sobre C es d^2s/dt^2. _____
7. Si la binormal está definida por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, entonces la normal principal es $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. _____
8. Si $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_2(t) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, entonces $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t) = 0$. _____
9. Si $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ son integrables, entonces $\int_a^b [\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)]\,dt = \left[\int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt\right]\cdot\left[\int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt\right]$. _____
10. Si $\mathbf{r}(t)$ es diferenciable, entonces $\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)|^2 = 2\mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. La trayectoria de una partícula en movimiento cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ yace en el plano __________.
2. La curvatura de una línea recta es $\kappa =$ __________.

Para la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{1}{3}t^3\rangle$,

3. $\mathbf{r}'(1) =$ __________,
4. $\mathbf{r}''(1) =$ __________,
5. $\kappa(1) =$ __________,
6. $\mathbf{T}(1) =$ __________,
7. $\mathbf{N}(1) =$ __________,
8. $\mathbf{B}(1) =$ __________,

y en el punto correspondiente a $t = 1$ una ecuación del

9. plano normal es __________, y una ecuación del
10. plano osculante es __________.

C. Ejercicios

1. Encuentre la longitud de la curva que traza la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \text{sen}\, t\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \le t \le \pi.$$

2. El vector de posición de una partícula en movimiento está dado por $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 7t\mathbf{k}$. Ya que la partícula empieza en un punto correspondiente a $t = 0$, encuentre la distancia que la partícula recorre hasta el punto correspondiente a $t = 3$. ¿En qué punto la partícula habrá recorrido $80\sqrt{3}$ unidades a lo largo de la curva?

3. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva trazada por

$$\mathbf{r}(t) = -3t^2\mathbf{i} + 4\sqrt{t+1}\,\mathbf{j} + (t - 2)\mathbf{k}$$

en el punto correspondiente a $t = 3$.

4. Dibuje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

5. Dibuje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \text{senh}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

6. Dado que

$$\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = -t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k},$$

calcule la derivada $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

7. Dado que

$$\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} - \text{sen}\, t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k},$$

calcule $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

8. Dado que $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ son diferenciables, encuentre $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$.

9. Sobre una partícula de masa m actúa una fuerza continua de magnitud 2, que tiene dirección paralela al eje y positivo. Si la partícula empieza con una velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ desde (1, 1, 0), encuentre el vector de posición de la partícula y las ecuaciones paramétricas de su trayectoria. [*Sugerencia*: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.]

10. El vector de posición de una partícula en movimiento es $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j}$.
a) Dibuje la trayectoria de la partícula.
b) Dibuje los vectores de velocidad y aceleración en $t = 1$.
c) Encuentre la rapidez en $t = 1$.

11. Encuentre la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ cuando ésta pasa por el plano $-x + y + z = -4$.

12. La velocidad de una partícula en movimiento es $\mathbf{v}(t) = -10t\mathbf{i} + (3t^2 - 4t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si la partícula empieza en $t = 0$ en (1, 2, 3), ¿cuál es su posición en $t = 2$?

13. La aceleración de una partícula en movimiento es $\mathbf{a}(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\mathbf{j}$. Dado que la velocidad y la posición de la partícula en $t = \pi/4$ son $\mathbf{v}(\pi/4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/4) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (\pi/4)\mathbf{k}$, respectivamente, ¿cuál es la posición de la partícula en $t = 3\pi/4$?

14. Dado que $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t. Determine la curvatura.

15. Suponga que la función vectorial del problema 5 es el vector de posición de una partícula en movimiento. Encuentre los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ en $t = 1$. Determine la curvatura en este punto.